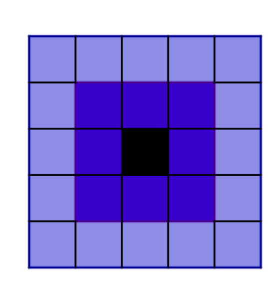
Epreuves sur dossiers du CAPES externe de mathématiques 2019

Thème : suites

L'exercice



Un artisan doit carreler une pièce carrée accueillant en son centre une petite statue dont le socle est carré. Il utilise des carreaux de même dimension que le socle de la statue. Il commence d'abord en entourant celle-ci par une couronne de carreaux et poursuit avec des couronnes de plus en plus grandes comme indiqué sur la figure ci-contre, où le socle de la statue est représenté par le carré noir central.
Il a besoin de 157 couronnes autour du socle de la statue pour paver la salle.

Il dispose en tout de 99 221 carreaux, en a-t-il assez?

Les productions de trois élèves de terminale STMG

Élève 1

Pour passer d'une couronne à une autre, l'artisan doit rajouter 8 carreaux à chaque fois.
On a donc une suite arithmétique de premier terme 8 et de raison 8.
u_{157} *est le nombre de carreaux de la* 157*-ième couronne, on a* $u_{157} = 8 + 8 \times 157 = 1264$.
La salle étant carrée, on enlève les 4 carreaux formant les coins, on a donc en tout 1 260 *carreaux sur les quatre côtés donc 315 carreaux sur un côté. En ajoutant les deux coins, on obtient 317.*
Il faut donc $317^2 = 100\,489$ *carreaux . L'artisan n'a donc pas assez de carreaux.*

Élève 2

u_n *est le nombre de carreaux sur la* n*-ième couronne, on a* $u_1 = 8$. *Pour passer d'une couronne à l'autre, il suffit d'ajouter les quatre coins. On a donc une suite arithmétique de premier terme 8 et de raison 4.*

Le nombre de carreaux nécessaire pour carreler entièrement la salle est égal à

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{157} = 157 \times \frac{8 + 4 \times 156}{2} = 49\,612.$$

L'artisan a donc largement assez de carreaux.

Élève 3

J'ai calculé l'aire totale et j'ai soustrait l'aire du socle; j'obtiens $157^2 - 1$.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les démarches de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez les conseils que vous pourriez leur apporter.

2 – Présenter une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale STMG.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *suites* permettant notamment de développer les compétences « chercher » et « calculer ».

Thème : arithmétique

L'exercice

Soit n un entier naturel.
Démontrer que, dans l'écriture en base dix, les entiers n et n^5 ont le même chiffre des unités.

Les réponses de trois élèves de terminale scientifique spécialité mathématiques

Élève 1

Je regarde tous les cas possibles pour le chiffre des unités, entre 1 et 9.

$$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1, \qquad 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32, \qquad 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$$

et ainsi de suite. Je calcule les autres avec un tableur, ça marche chaque fois, c'est le même chiffre.

Élève 2

J'ai comparé les restes de n^5 et n dans la division euclidienne par 10 à l'aide d'un programme écrit en langage Python, j'obtiens les mêmes restes. Donc le chiffre des unités de n^5 et n est le même.

```
from math import*
for n in range(10):
    a=(n**5)%10
    b=n%10
    if a==b:
        print(n)
```

Élève 3

J'ai calculé $n^5 - n$ pour les premières valeurs de n, le dernier chiffre est 0.
Je vais le prouver par récurrence : je suppose que $n^5 - n$ est multiple de 10 et alors je dois montrer que $(n+1)^5 - (n+1)$ est aussi multiple de 10.

$$\begin{aligned}(n+1)^5-(n+1) &= n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1-n-1\\ &= (n^5-n)+10(n^3+n^2)+5(n^4+n)\\ &= 5(n^4+n)\end{aligned}$$

car $n^5 - n$ et $10(n^3+n^2)$ sont des multiples de 10.
Ensuite, je ne sais pas quoi faire pour $n^4 + n$.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des trois élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique spécialité mathématiques.

3 – Présenter deux exercices sur le thème *arithmétique*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. L'un des exercices devra notamment permettre de travailler la compétence « communiquer ».

Thème : probabilités

L'exercice

On dispose de deux pièces A et B.

La probabilité d'obtenir pile avec la pièce A est égale à $\frac{1}{3}$; avec la pièce B, cette probabilité est $\frac{1}{2}$.

On effectue n lancers de chaque pièce, avec $n \geqslant 4$.

A-t-on plus de chances d'obtenir exactement trois fois pile avec la pièce A ou avec la pièce B ?

Les productions de deux élèves de terminale

Élève 1

En utilisant un tableur et en faisant varier n, j'ai comparé la probabilité d'avoir trois fois pile avec la pièce A et la probabilité d'avoir trois fois pile avec la pièce B.
Je trouve que c'est vrai à partir de 8.

	A	B	C
1	*n*	*pièce A*	*pièce B*
2	4	9,9E-02	2,5E-01
3	5	1,6E-01	3,1E-01
4	6	2,2E-01	3,1E-01
5	7	2,6E-01	2,7E-01
6	8	2,7E-01	2,2E-01
7	9	2,7E-01	1,6E-01

Élève 2

Je nomme p la probabilité d'obtenir pile à chaque lancer.
Par indépendance des lancers successifs, j'obtiens la probabilité d'avoir trois fois pile avec une pièce :

$$p^3(1-p)^{n-3}.$$

Je dois comparer $\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$ *et* $\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ *mais je n'y suis pas arrivé.*

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pourriez leur proposer.

2 – Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale.

3 – Présenter deux exercices sur le thème *probabilités*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. L'un des exercices devra notamment permettre de travailler la compétence « chercher ».

Thème : conjecture et démonstration

L'exercice

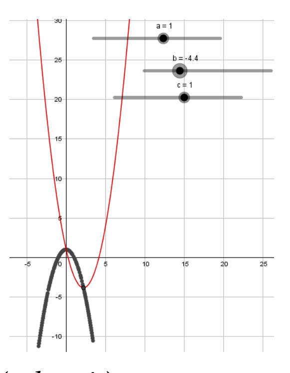
On considère les paraboles d'équation $y = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels, avec a non nul.

1. Quel est le lieu des sommets de ces paraboles lorsque b varie dans $\mathbb{R}$, a et c étant fixés ?
2. On fixe $c = 1$. Tout point du plan est-il le sommet d'une de ces paraboles ?

Les réponses de deux élèves de première S à la question 1

Élève 1

En utilisant un logiciel de géométrie et en activant la trace du sommet, nous pouvons constater qu'il se déplace sur une parabole.



Élève 2

Le sommet S d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a pour coordonnées $\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

Comme je ne vois pas quel est le lieu des sommets, j'ai utilisé un tableur.

J'ai fixé $a = 1$ et $c = 1$ pour obtenir une représentation graphique de la position du sommet : c'est une parabole d'équation $y = 1 - x^2$.

	A	B	C
1	b	abscisse sommet	ordonnée sommet
2	-5	2,5	-5,25
3	-4,5	2,25	-4,0625
4	-4	2	-3
5	-3,5	1,75	-2,0625
6	-3	1,5	-1,25
7	-2,5	1,25	-0,5625
8	-2	1	0
9	-1,5	0,75	0,4375
10	-1	0,5	0,75
11	-0,5	0,25	0,9375
12	0	0	1
13	0,5	-0,25	0,9375
14	1	-0,5	0,75
15	1,5	-0,75	0,4375
16	2	-1	0

Position du sommet

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser ces productions d'élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'aide que vous pourriez leur apporter.

2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première S.

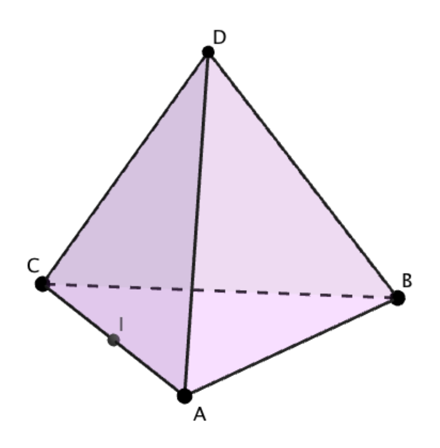
3 – Proposer deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. L'un au moins des exercices devra permettre notamment de développer la compétence « communiquer ».

Thème : géométrie dans l'espace

L'exercice

On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arête a.
On note I le milieu du segment $[AC]$.

Donner une valeur approchée à 10^{-2} radian près de l'angle $\widehat{DBI}$.



Les réponses de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

Je me place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.

Le point I a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ *donc* $\overrightarrow{BI}$ *a pour coordonnées* $\left(-1, \frac{1}{2}, 0\right)$ *et* $\overrightarrow{BD}$ *a pour coordonnées* $(-1, 0, 1)$ *donc* $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD} = 1$.

J'en déduis que $\cos\left(\widehat{DBI}\right) = \dfrac{\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD}}{BI \times BD} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times 1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ *et donc* $\widehat{DBI} = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Je ne comprends pas le problème car ce n'est pas possible.

Élève 2

Je sais que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté c est $c\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le triangle DBI *est rectangle et isocèle en I car* $BI = DI = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Par conséquent $\widehat{DBI} = \dfrac{\pi}{4} = 0,79$ *radian.*

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Présenter deux exercices sur le thème *géométrie dans l'espace*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. L'un des exercices devra notamment permettre de travailler la compétence « représenter ».

Thème : modélisation

L'exercice

Le tableau ci-dessous donne la population de la Syldavie, en milliers d'habitants, tous les dix ans depuis 1950.

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Population	50 600	52 325	54 115	55 944	57 846	59 784	61 823

On suppose qu'après 2010, le taux d'évolution de cette population sur chaque décennie est égal au taux d'évolution décennal moyen entre 1950 et 2010.

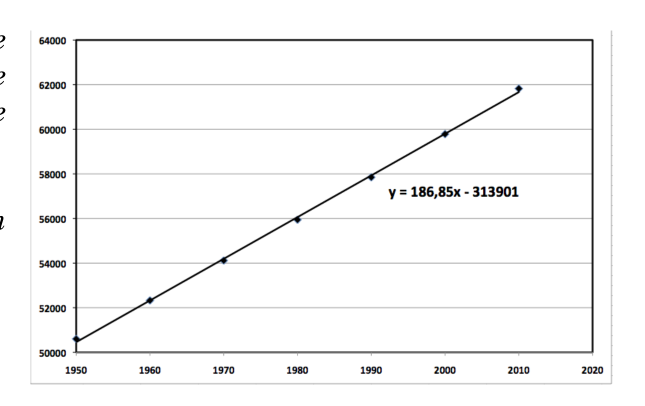
1. Calculer les taux d'évolution sur chaque décennie.
2. Calculer le taux décennal moyen.
3. Estimer la population en 2030 en expliquant la démarche.

Les productions de deux élèves de terminale STMG

Élève 1

question 3 :

Si après 2010, l'évolution est en moyenne comme entre 1950 et 2010, alors je trace la droite de régression du nuage de points avec la méthode des moindres carrés.
J'obtiens la droite : $y = 186,85x - 313\,901$.
En 2030, on remplace donc x par 2030 et on obtient $65\,405$ *milliers d'habitants.*



Élève 2

question 2 :

Entre 1950 et 2010, le taux d'évolution est : $\dfrac{61\,823 - 50\,600}{50\,600} \approx 0,2217 = 22,17\,\%$.

Donc le taux moyen tous les 10 ans est de $22,17\,\% \div 6 = 3,696\,\%$.

question 3 :

En 2030, la population en Syldavie sera donc égale à $61\,823 \times 1,0369^2 \approx 66\,477$ *milliers d'habitants.*

Les questions à traiter devant le jury

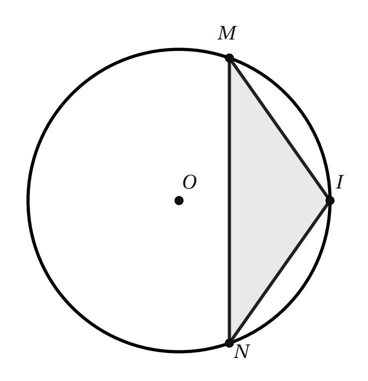
1 – Analyser les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez, en particulier, les aides qui pourraient leur être apportées.

2 – Présenter une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale STMG.

3 – Proposer deux exercices, un au niveau lycée et un au niveau collège, sur le thème *modélisation.* L'un des exercices devra notamment permettre de développer la compétence « chercher ».

Thème : problème avec prise d'initiative

L'exercice



On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 et un point I fixé sur ce cercle. Soit M un point mobile sur ce cercle, on note N son symétrique par rapport à la droite (OI).

Quelle est la nature du triangle MNI lorsque son aire est maximale ?

Les réponses de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

Quand le point M est en I ou en son symétrique par rapport à O, l'aire du triangle MNI est nulle.
Par conséquent l'aire du triangle est maximale quand le point M est à la verticale de O et le triangle MNI est alors rectangle en I.

Élève 2

Soit $\alpha = \widehat{OIM}$*. Comme le triangle OMI est isocèle en O, on a donc MI* $= 2\cos(\alpha)$.
La droite (OI) coupe [MN] en son milieu H. J'en déduis que MH $= MI \times \sin(\alpha)$ *et HI* $= MI \times \cos(\alpha)$.
Donc l'aire est égale à $f(\alpha) = 4\cos^3(\alpha)\sin(\alpha)$.
J'ai cherché où la dérivée s'annule mais je n'y suis pas arrivé.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Présenter deux exercices sur le thème *problème avec prise d'initiative*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée.

Thème : suites

L'exercice

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n.$$

Étudier le sens de variation de cette suite.

Les productions de trois élèves de terminale scientifique

Élève 1

En calculant les premiers termes, on voit que la suite tend vers $+\infty$ donc elle est croissante.

Élève 2

En supposant que la suite est croissante, on a $u_n \geqslant 3$ puisque $u_0 = 3$.

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n = u_n(u_n - 2).$$

On vérifie que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et donc elle est bien croissante.

Élève 3

La fonction $f(x) = x^2 - x$ est croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ donc la suite est croissante.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les productions de ces trois élèves en repérant les erreurs et les réussites. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *suites* dont l'un fait appel à un algorithme.

Thème : probabilités

L'exercice

Mathieu et Jeanne ont inventé un jeu avec leur calculatrice. Chaque joueur obtient un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0;1]$ à l'aide de la calculatrice. Si le produit des deux nombres est inférieur ou égal à $0,5$ alors Jeanne gagne, sinon c'est Mathieu qui gagne. Après quelques parties, ils s'aperçoivent que Jeanne gagne très souvent et Mathieu propose alors de remplacer la valeur $0,5$ par un autre nombre pour rendre le jeu plus équitable.
La version initiale du jeu avantage-t-elle Jeanne? Mathieu peut-il rendre ce jeu équitable?

Les productions de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

J'ai commencé par réaliser le programme ci-contre pour vérifier que Jeanne gagne très souvent.
J'ai simulé 10000 *parties et Jeanne a gagné* 8450 *fois donc ce jeu avantage effectivement Jeanne.*

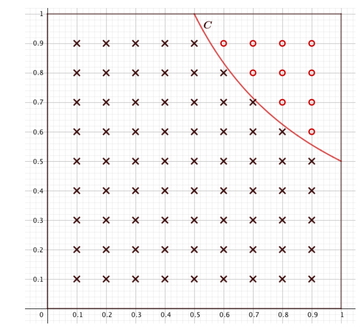
```
from random import*
def jouer():
    x=uniform(0,1)
    y=uniform(0,1)
    if x*y<=0.5:
        return "Jeanne"
    else:
        return "Mathieu"
```

J'ai remplacé la valeur $0,5$ *par des valeurs plus petites et à nouveau j'ai simulé* 10000 *parties.*
Avec la valeur $0,19$*, le jeu semble plus équitable.*

Valeurs k qui remplacent 0,5	*0,3*	*0,2*	*0,15*	*0,17*	*0,18*	*0,19*
Victoires de Jeanne sur 10000 parties	*6603*	*5217*	*4405*	*4730*	*4937*	*5023*

Élève 2

Dans ce jeu, c'est comme si dans mon repère ci-contre, on choisissait un point au hasard dans le carré de côté 1.
Les points marqués d'une croix font gagner Jeanne et les autres font gagner Mathieu.
Mais il y a plein d'autres points et les points qui font gagner Jeanne sont placés sous la courbe C d'équation $y = \dfrac{0,5}{x}$.
L'aire de Jeanne est égale à : $0,5 + 0,5\ln(2) \approx 0,8466$.



Pour rendre ce jeu plus équitable, il faut trouver k pour que l'aire sous la courbe d'équation $y = \dfrac{k}{x}$ *soit égale à 0,5. On a donc l'équation à résoudre :* $\displaystyle\int_0^1 \frac{k}{x}\,\mathrm{d}x = 0,5$.
On obtient $k\ln(1) - k\ln(0) = 0,5$ *mais il y a un problème car* $\ln(0)$ *n'existe pas.*

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les productions de ces deux élèves en mettant en évidence la pertinence de leurs démarches ainsi que leurs erreurs éventuelles. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Présenter une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposer deux exercices, sur le thème *probabilités*, l'un au niveau lycée et l'autre au niveau collège.

Thème : conjecture et démonstration

L'exercice

Pour tout réel p, on considère la fonction f_p définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_p(x) = x(p - \ln x)$.

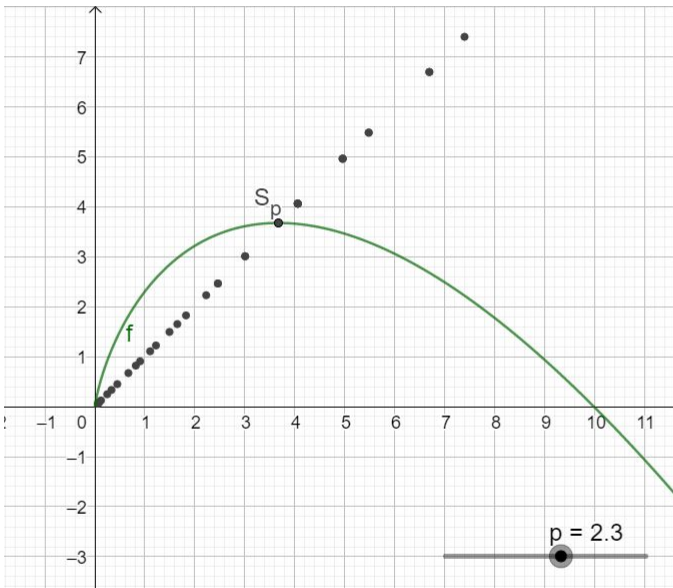
1. Montrer que f_p possède un maximum sur $]0\,;+\infty[$, atteint en une valeur x_p que l'on précisera.
2. On note S_p le point de la courbe représentative de f_p d'abscisse x_p. L'affirmation suivante est-elle vraie ?

   Affirmation : lorsque p parcourt $\mathbb{R}$, l'ensemble des points S_p est une demi-droite.

Les productions de deux élèves de terminale S à la deuxième question

Élève 1

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, j'ai affiché la trace des sommets des courbes des fonctions f_p :



J'observe que les points S_p sont alignés. L'affirmation est vraie.

Élève 2

À la première question, j'ai trouvé que $x_p = \mathrm{e}^{p-1}$ et donc on trouve la courbe d'une exponentielle. L'affirmation est fausse.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

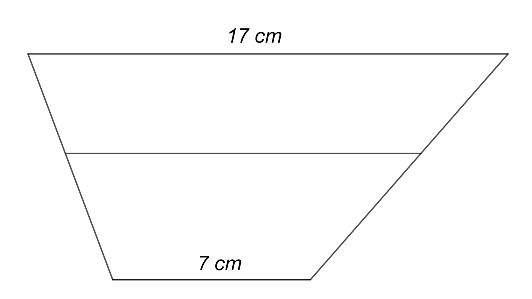
2 – Présenter une correction de la deuxième question de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration*, l'un au niveau collège et l'autre au niveau lycée. L'un des exercices devra notamment développer la compétence « raisonner ».

Thème : géométrie plane

L'exercice

On considère un trapèze, représenté ci-contre : ses bases sont de longueurs 7 cm et 17 cm. On partage ce trapèze en deux trapèzes de même aire en traçant un segment parallèle aux bases. Quelle est la longueur de ce segment ?



Les productions de deux groupes d'élèves de cycle 4

Groupe 1

On a construit une figure dans un quadrillage avec une hauteur du grand trapèze égale à 10 carreaux.
On remarque que le côté oblique partage chaque carreau en 2, c'est facile de compter tous les carreaux.
On a tracé le trait pour obtenir la largeur du milieu : 13.



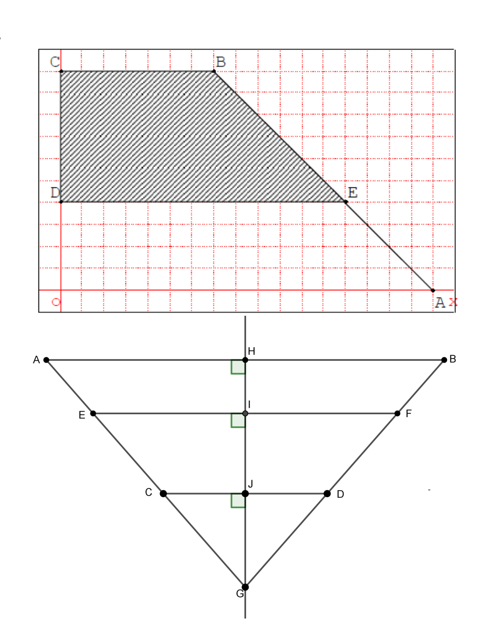
On a reconnu une figure de Thalès.

GAB est un agrandissement de GCD de rapport $\frac{17}{7}$.

GEF est un agrandissement de GCD de rapport $\frac{\ell}{7}$.

On a posé a = aire de GCD.
Comme on a l'égalité des aires des deux trapèzes ABFE et EFDC, on a écrit : $\frac{17}{7}a - \frac{\ell}{7}a = \frac{\ell}{7}a - a$.

On a simplifié et on obtient $\ell = 12$.



Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les réponses de ces deux groupes d'élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez, en particulier, les aides qui pourraient leur être apportées.

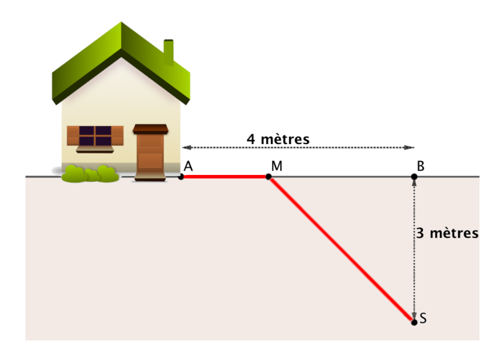
2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe en cycle 4.

3 – Proposer deux exercices, un au niveau du lycée et un au niveau du collège sur le thème *géométrie plane*.

Thème : optimisation

L'exercice

Une maison doit être raccordée, à partir du point A, à un réseau de gaz situé au point S, à 4 mètres de A horizontalement et à 3 mètres verticalement de B, à l'aide d'une conduite comme indiqué sur la figure ci-contre.
La conduite de gaz est schématisée en rouge.



L'installation de la partie de la conduite située à la surface du sol coûte 300 euros par mètre alors que celle enfouie sous le sol coûte 750 euros par mètre.
Où placer le point M sur le segment $[AB]$ pour rendre le coût de raccordement minimal ?

Les productions de trois élèves de terminale scientifique

Élève 1

Si on enterre complètement la conduite, alors elle est représentée par $[AS]$.
Avec le théorème de Pythagore, on a $AS = 5$ *m et le coût vaut donc :* $5 \times 750 = 3750$, *donc* 3750 *euros.*
Si on va jusqu'au point B *et que l'on descend verticalement jusqu'à* S, *alors le coût vaut :*
$4 \times 300 + 3 \times 750 = 3450$, *soit* 3450 *euros. Plus on ira vers* B, *moins il y aura de partie enterrée, donc le coût minimal est obtenu quand* $M = B$, *soit à 4 mètres de* A.

Élève 2

Avec le tableur, je calcule, pour toutes les valeurs possibles de la distance AM *(entre 0 et 4 mètres tous les centimètres car cela suffit dans la réalité), la distance* MS *avec Pythagore, puis le coût de la partie au sol et le coût de la partie enfouie. Le coût minimal total est 3 262,16 euros quand on commence à creuser à 2,69 mètres du point A.*

	A	B	C	D	E
1	AM	MS	Coût au sol	Coût en terre	Coût total
2	*0*	*5*	*0*	*3750,00*	*3750,00*
3	*0,01*	*4,99200361*	*3*	*3744,00*	*3747,00*
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
270	*2,68*	*3,27756007*	*804*	*2458,17*	*3262,17*
271	*2,69*	*3,277354548*	*807*	*2455,16*	*3262,16*
272	*2,7*	*3,26955654*	*810*	*2452,17*	*3262,17*
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
402	*4*	*3*	*1200*	*2250*	*3450*

Élève 3

Je pose $AM = x$ *et j'ai calculé la longueur AM+MS. J'obtiens une fonction* $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 8x + 25}$.
Avec ma calculatrice, je vois que la fonction est strictement croissante de 5 jusqu'à 7.
Donc il faut mettre M en A pour avoir le minimum.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les productions de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'aide que vous pourriez leur apporter.

2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *optimisation* permettant notamment de développer la compétence « raisonner ».

Thème : problème avec prise d'initiative

L'exercice

Un homme a gardé toutes les bougies de chacun de ses anniversaires depuis son premier anniversaire. Il lui manque cependant les bougies d'une année où il n'a pas pu le fêter.
Chaque année, il met sur le gâteau autant de bougies que son âge. À ce jour il a conservé en tout 1999 bougies.
À quel âge n'a-t-il pas pu fêter son anniversaire ?

Les productions de deux élèves de première scientifique

Élève 1

J'ai utilisé un tableur avec une colonne « âge », une colonne « somme des bougies » et une colonne « somme − 1999 ». J'obtiens le tableau ci-contre. Donc il n'a pas eu de gâteau à 17 ans ou à 81 ans.

	A	B	C
1	*âge*	*somme*	*somme − 1999*
2	*1*	*1*	*-1998*
⋮			
61	*60*	*1830*	*-169*
62	*61*	*1891*	*-108*
63	*62*	*1953*	*-46*
64	*63*	*2016*	*17*
65	*64*	*2080*	*81*
66	*65*	*2145*	*146*
67	*66*	*2211*	*212*
68	*67*	*2278*	*279*

Élève 2

On résout : $S_n = 1999 + x$ *où* x *est l'anniversaire non fêté et* S_n *le nombre de bougies d'anniversaire depuis l'âge de 1 an.*

$$\frac{n(n+1)}{2} = 1999 + x \Longleftrightarrow n^2 + n - 2(1999 + x) = 0.$$

On obtient alors : $\Delta = 1 + 8(1999 + x) = 15993 + 8x$.

Pour $x = 17$ *on obtient* $\Delta = 16129 = 127^2$.

Donc à 17 ans, il n'a pas eu d'anniversaire.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les démarches de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs, ainsi que l'accompagnement que vous pourriez leur apporter.

2 – Présenter la correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *problème avec prise d'initiative* permettant notamment de développer la compétence « communiquer ».

Thème : problème avec prise d'initiative

L'exercice

Au début du 19e siècle, un marchand veut remonter de Sète jusqu'à Toulouse pour vendre sa farine. Pour cela, il emprunte le canal du Midi qui relie la mer Méditerranée à la Garonne. Ce canal comporte 63 écluses. À chacune d'elles, le marchand doit laisser 1% de son chargement en péage et échanger 5 kg de farine contre de la nourriture.

1 – Si le marchand part de Sète avec 10 tonnes de farine, combien lui en restera-t-il à Toulouse ?

2 – Pour rentabiliser son voyage, le marchand doit arriver à Toulouse avec au moins la moitié de son chargement de départ. Quelle quantité minimale de farine doit-il embarquer à Sète pour que son voyage soit rentable à l'arrivée à Toulouse ?

Les réponses de trois élèves de terminale scientifique à la question 2

Élève 1

J'ai rédigé un programme en langage Python.
Pour trouver la quantité minimale de farine, j'ai programmé une fonction qui calcule le chargement restant lors de l'arrivée à Toulouse. Puis je suis parti de 10 000 et j'ai cherché le nombre minimum de kg de farine pour rentabiliser le voyage.
Le programme affiche 7 589.

```
from math import *
def toulouse(a) :
    for i in range(63):
        a = a - 0.01*a - 5
    return(a)

a = 10000
while toulouse(a) >= a/2:
    a = a - 1
print(a)
```

Élève 2

N est le nombre de kg à l'arrivée, il faut l'augmenter de 1% à chaque écluse.
j'obtiens $N \times (1,01)^{63}$ kg puis il faut ajouter 63×5 kg pour la nourriture.
On veut que : $N \times (1,01)^{63} + 315 = 2N$, je trouve $N \approx 2456$ donc il doit partir de Sète avec le double soit 4 912 kg de farine.

Élève 3

J'appelle u_n le nombre de kg à la n^e écluse. On a donc $u_{n+1} = 0,99u_n - 5$ et je dois résoudre $u_{63} \geq \dfrac{u_0}{2}$.
Ensuite je ne sais pas comment faire.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des trois élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

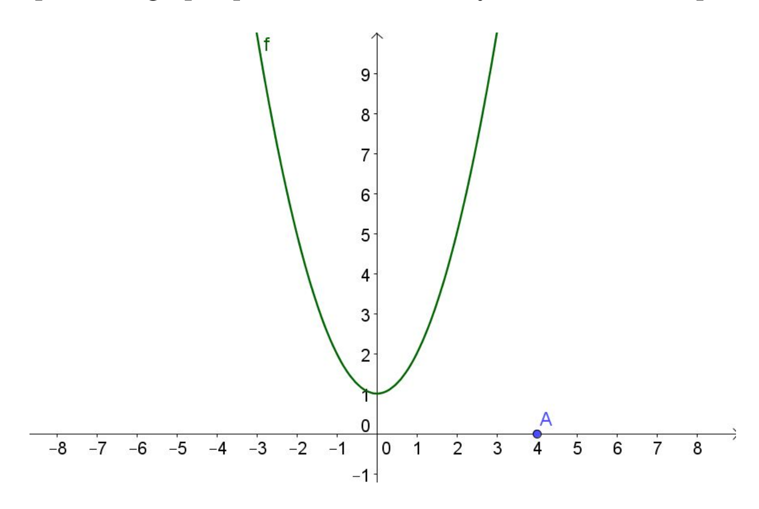
2 – Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale.

3 – Présenter deux exercices sur le thème *problème avec prise d'initiative*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. L'un des exercices devra notamment permettre de travailler la compétence « raisonner ».

Thème : dérivation

L'exercice

Dans un repère, on a représenté graphiquement la fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$ et le point $A(4;0)$.



Existe-il des tangentes à la courbe passant par le point A ?

Les productions de deux élèves de première S

Élève 1

Avec un logiciel, je construis la parabole et une droite variable passant par A. Je constate qu'il existe une seule tangente, en $x = -0,1$.
Je cherche alors l'équation de cette tangente sous la forme $y = m(x-4)$. *L'équation du second degré* $x^2 + 1 = m(x-4)$ *doit avoir une seule solution, car il n'y a qu'un seul point d'intersection entre une courbe et sa tangente. Donc son discriminant doit être nul et j'en déduis la valeur de m.*

Élève 2

Je sais que l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est $y - (a^2+1) = 2a(x-a)$. *Elle doit passer par A et donc l'équation devient* $-a^2 - 1 = 2a(4-a)$. *Cette identité remarquable est fausse, je ne sais pas continuer.*

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

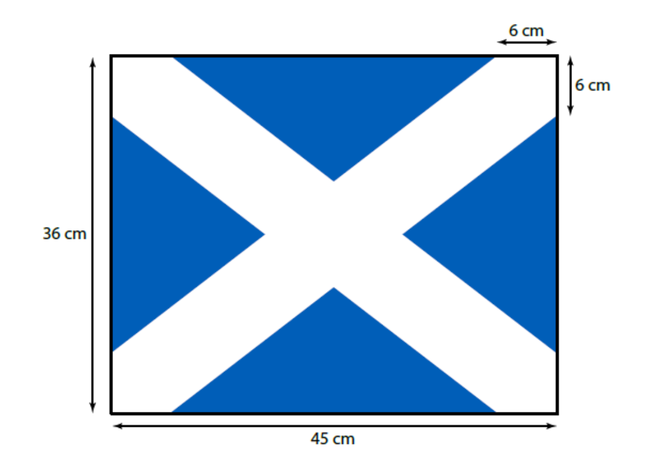
2 – Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première S.

3 – Présenter deux exercices sur le thème *dérivation*, dont l'un au moins illustre une application à une autre discipline scientifique.

Thème : géométrie plane

L'exercice

Le drapeau écossais est constitué d'une croix de Saint-André blanche sur fond bleu. La figure ci-contre est un schéma du drapeau avec les cotes utiles à son dessin.
Quelle est l'aire de la partie blanche du drapeau ?



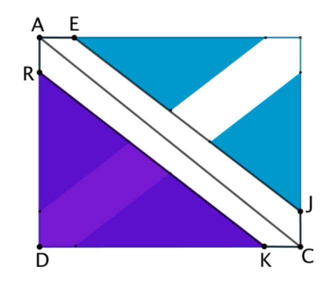
Les productions de trois élèves de troisième

Élève 1

À l'aide d'un logiciel de géométrie, j'ai reproduit la figure. Je trouve que la croix blanche a une aire de $834{,}6\,\text{cm}^2$.

Élève 2

Je commence par calculer l'aire d'une demi-bande blanche diagonale, en traçant la diagonale du grand rectangle.



L'aire du demi-rectangle est $\dfrac{36\times 45}{2} = 810\,\text{cm}^2$.

L'aire du triangle RDK est $\dfrac{(36-6)\times(45-6)}{2} = 585\,\text{cm}^2$.

L'aire de la bande RAEJCKR est $2\times(810-585) = 450\,\text{cm}^2$.
L'aire de la croix blanche vaut donc le double, soit $900\,\text{cm}^2$.

Élève 3

Les bords de la croix sont parallèles aux diagonales du drapeau, l'angle θ *qu'elles forment avec le côté gauche vérifie donc* $\tan\theta = \dfrac{45}{36}$ *et je trouve* $\theta \approx 51{,}34°$.

L'aire du triangle bleu de gauche vaut alors $(36-6-6)\times\dfrac{36-6-6}{2}\times\cos\theta \approx 180\text{cm}^2$ *alors que l'aire du triangle du bas vaut* $(45-6-6)\times\dfrac{45-6-6}{2}\times\cos\theta \approx 340\text{cm}^2$.

Au total, l'aire de la croix blanche vaut $36\times 45 - 2\times 180 - 2\times 340 \approx 580\,\text{cm}^2$.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des trois élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs erreurs. Vous préciserez les aides que vous pourriez leur apporter.

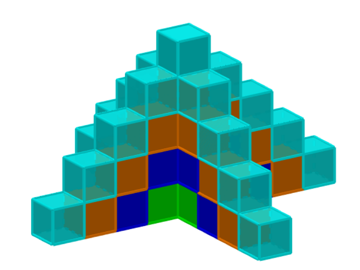
2 – Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de troisième.

3 – Présenter deux exercices sur le thème *Géométrie plane*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. L'un des exercices devra notamment permettre de travailler la compétence « raisonner ».

Thème : suites

L'exercice

On empile des cubes selon le modèle ci-contre :



1 – Combien de cubes sont utilisés si on construit ainsi dix étages ?

2 – Combien d'étages peut-on construire au maximum avec 2 019 cubes, et combien restera-t-il de cubes ?

Les réponses de deux élèves à la première question

Élève 1 (au cycle 4)

1. À chaque étage de cubes, il y a quatre cubes de plus qu'à l'étage précédent. J'ai utilisé ce programme de Scratch :
J'ai trouvé qu'il y avait 190 cubes pour dix étages.



Élève 2 (en première scientifique)

1. Soit u_n le nombre de cubes utilisés pour construire le n^{e} étage.
Comme pour chaque nouvel étage, il faut ajouter 4 cubes par rapport à l'étage précédent, la suite u_n est arithmétique de raison 4 avec $u_0 = 1$.

Or $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} = \dfrac{(1+1+4\times 10)}{2} \times 11 = 231$, il faut donc 231 cubes pour faire dix étages.

Les questions à traiter devant le jury

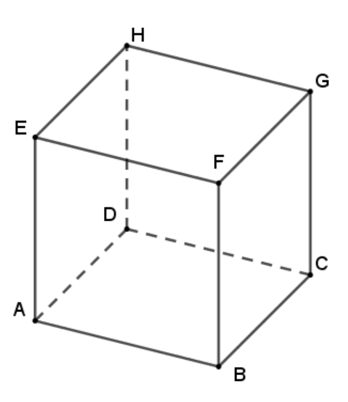
1 – Analyser la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3 – Présenter deux exercices sur le thème *suites*. L'un des exercices devra notamment permettre de travailler la compétence « chercher ».

Thème : géométrie dans l'espace

L'exercice



On coupe un cube $ABCDEFGH$ de côté 6 cm selon le plan (BEG).
On obtient le tétraèdre $BEFG$.

Combien mesure la hauteur du tétraèdre $BEFG$ relative à la base BEG?

Les réponses de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

Je me place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

$\overrightarrow{DF}$ $(1, -1, 1)$ *est un vecteur normal au plan* (BEG) *donc* (BEG) *a pour équation* $x - y + z = 0$ *et la hauteur passant par F dans le tétraèdre BEFG a pour équation paramétrique :*

$$\begin{cases} x = t + 1, \\ y = -t, \\ z = t + 1. \end{cases}$$

D'où $t + 1 + t + t + 1 = 0$ *donc* $t = -\dfrac{2}{3}$ *et l'intersection est* $I\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.
La hauteur mesure donc $\sqrt{\dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{9}} = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$.

Élève 2

Je calcule le volume du tétraèdre : $V = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{6^2}{2} \times 6\right) = 36\,\text{cm}^3$.

J'ai essayé de calculer le volume d'une autre façon mais je n'ai pas réussi à calculer l'aire de BEG.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

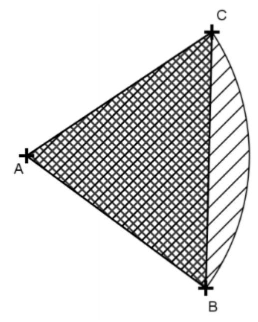
3 – Présenter deux exercices sur le thème *géométrie dans l'espace*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée.

Thème : problème conduisant à l'étude de fonctions

L'exercice

La figure ci-contre représente une portion d'un disque de centre A et de rayon 1. On fait varier la mesure en radian de l'angle $\widehat{BAC}$ dans l'intervalle $]0;\pi]$.

Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} d'une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ pour laquelle il y a égalité des aires de la surface hachurée et de la surface quadrillée.



Adapté du manuel Maths'x terminale S spécifique programme 2012

Les productions de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

J'ai posé $\widehat{BAC} = \alpha$ *donc l'aire de* $ABC = \dfrac{B \times h}{2} = \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

L'aire du secteur hachuré est égale à l'aire de la portion de disque privé de l'aire du triangle ABC.

Je résous l'équation
$\dfrac{\alpha}{2} - \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Je pose $f(\alpha) = 2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) - \dfrac{\alpha}{2}$.

Avec ma calculatrice graphique,
je trouve une solution entre $\dfrac{\pi}{2}$ *et* π.
J'ai écrit un programme en langage python.
Il retourne $a = 3,14082566319585$
et $b = 3,141592653589793$.

```
from math import sin, cos, pi
def f(x):
    return 2*sin(x/2)*cos(x/2)-x/2
def dicho():
    a = pi/2
    b = pi
    while b-a>=0.001:
        m = (a+b)/2
        if f(m)<0:
            a = m
        else
            b = m
    return a,b
```

Élève 2

J'ai posé $x = \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$ *donc l'aire de* ABC *est* $\sin(x)\cos(x)$ *et l'aire du secteur hachuré* $x - \sin(x)\cos(x)$.
Je résous l'équation $x - 2\sin(x)\cos(x) = 0$.
J'étudie la fonction f *définie par* $f(x) = x - 2\sin(x)\cos(x) = x - \sin(2x)$ *donc* $f'(x) = 1 - \cos(2x)$.
Comme la dérivée est positive, f *est strictement croissante.*
D'après le théorème de bijection il y a une unique solution.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *problème conduisant à l'étude de fonctions* l'un au moins permettant de développer la compétence « modéliser ».

Thème : raisonnement

L'exercice

À tout réel m, on associe la droite $\mathscr{D}_m$ d'équation :

$$(2m-1)x+(5-m)y-4m-7=0.$$

1 – Montrer qu'il existe un point K appartenant à toutes les droites $\mathscr{D}_m$.

2 – (a) Déterminer m pour que $\mathscr{D}_m$ passe par le point $A(1;1)$.

(b) Si l'on se donne un point P du plan, existe-t-il toujours un nombre réel m tel que $\mathscr{D}_m$ passe par le point P ?

Les productions de deux élèves de première S

Élève 1

Avec un logiciel de géométrie, j'ai construit la figure avec un curseur pour le paramètre m. En faisant varier m, je vois que :

1. *Toutes les droites $\mathscr{D}_m$ passent par le point $K(3;2)$.*
2. *(a) Avec $m=-1$, $\mathscr{D}_m$ passe par le point A.*

   (b) Quand m varie, la droite $\mathscr{D}_m$ balaie tout le plan donc on peut atteindre tous les points du plan.

Élève 2

1. *Si $m=0$, la droite $\mathscr{D}_0$ a pour équation $-x+5y-7=0$.*
   Si $m=5$, la droite $\mathscr{D}_5$ a pour équation $9x-27=0$.
   Les coordonnées du point d'intersection des deux droites vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{l}-x+5y-7=0\\9x-27=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=3\\y=2\end{array}\right.$$

   Donc toutes les droites $\mathscr{D}_m$ passent par le point $K(3;2)$.

2. *(a) On remplace les coordonnées de A dans l'équation $\mathscr{D}_m$ et on obtient $m=-1$.*

   (b) Si on fait comme dans la question précédente, on obtient une valeur de m donc il existe toujours un nombre m tel que $\mathscr{D}_m$ passe par le point P.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première S.

3 – Proposer deux exercices, un au niveau lycée et un au niveau collège, qui illustrent différents types de raisonnements utilisés en mathématiques.